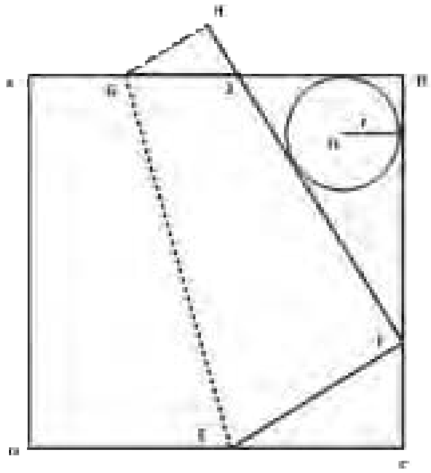
SANGAKU: GEOMETRÍA EN LOS TEMPLOS JAPONESES

FERNANDO FOUZ (*)

INTRODUCCIÓN

Buscando problemas interesantes para un trabajo, me encontré en la página 8 del libro *More Mathematical Morsels*, (MAA, 1991) del autor Ross Honsberger, el siguiente problema:



Supongamos un cuadrado de papel de vértices ABCD que doblamos según la línea discontinua de puntos entre G y E, de tal manera que el vértice D se convierte en el punto F sobre el lado BC y el vértice A pasa a ser H. Si ahora inscribimos una circunferencia en el triángulo rectángulo superior JBF, que no es tapado por el plegamiento, como se muestra en la figura, se pide demostrar que la longitud del radio de esa circunferencia inscrita en JBF es igual a la del segmento HJ que "asoma" fuera del cuadrado.

Después de estudiarlo y obtener una solución para el problema, me fijé en el enigmático título que el problema tenía: *Sangaku* y presté más atención al párrafo de introducción que el problema traía y en el que, someramente, se citaba su origen. Picado por la curiosidad traté de profundizar más en el tema y, en estos casos, el camino más sencillo es Internet de donde, investigando diversas páginas web, he recapitulado una serie de problemas geométricos que se engloban dentro del término *Sangaku*.

¿Qué significa el término Sangaku?

Es una palabra japonesa que literalmente significa "tablilla de madera" y, en particular, se refiere a las tablas de madera que se colgaban en los templos budistas y santuarios sintoístas, y que, generalmente, contenían relevantes descubrimientos matemáticos de contenidos geométricos. Al parecer este hecho de colgar las tablillas en los templos tenía un doble significado, por un lado, agradecer a los dioses de esos templos los descubrimientos y, por otro lado, dar honor a sus autores.

Los problemas en su mayoría son geométricos pero también los hay aritméticos y algebraicos. Para estos cálculos recurrían a un conjunto de símbolos que representaban a los números enteros y que recibían el nombre de *SANGI*. Estos símbolos estaban construidos con pequeñas líneas agrupadas vertical y horizontalmente, lo que sencillamente llamaríamos *palotes*, que escritos en rojo eran números positivos y en negro, negativos, pues utilizaban la misma escritura para el número positivo y negativo variando sólo el color.

(*) Asesor de Matemáticas del Berritzegune de Donostia.

Es interesante señalar que estas tablillas estaban hechas por personas de diversa procedencia, había desde samurais hasta comerciantes, pasando por granjeros e incluso niños, no sólo por lo que hoy en día llamaríamos un matemático profesional. Cabe también citar que sólo se escribía el problema y no su solución, lo cual podía tener una cierta postura de desafío para los que estuviesen interesados en el tema. Los problemas en su mayoría son de geometría plana aunque, algunos de ellos, son problemas tridimensionales en los que intervienen esferas o agrupaciones de ellas, e incluso en alguno de ellos, aparece a la intersección de un cilindro y una esfera.

Estas tablillas se construyeron durante el periodo EDO que duró desde 1603 hasta 1867. Un periodo caracterizado por el aislamiento de Japón del mundo occidental, lo que provocó que no se conociese en ese país el gran desarrollo que en esos siglos tuvo la Matemática en Europa, de tal manera que algunos teoremas, que llamaríamos *europeos*, fueron también realizados independientemente por japoneses. Este hecho hace que en los libros de Geometría japoneses figuren los nombres de matemáticos japoneses desconocidos en teoremas que en Occidente tienen nombres de reconocidos matemáticos. Hay que señalar que algunos de estos descubrimientos tienen fecha anterior a su “descubrimiento occidental”. Uno de los problemas que veremos posteriormente (perteneciente a la muy activa prefectura de Gumma de 1824) es por ejemplo una variante del “Teorema de los círculos tangentes de Descartes”. Para los amigos de la Historia cabe señalar que la historia de Japón está dividida en periodos que van desde el primer periodo, llamado Jomón (8000-300 a.c.) hasta el actual, el decimocuarto, que recibe el nombre de Heisei (1989-...).

La aparición de las tablillas en este periodo EDO, va desde la más antigua conservada de 1683 en la prefectura de Tochigi, hasta la de Kinshouzan en 1865. En algunos casos se descubrieron muchos años más tarde de su creación, así por ejemplo, una tablilla realizada en 1814, se descubrió en 1994. Actualmente se conservan algo más de 800 tablillas pero se sabe que su número ha sido muy superior, pues se han perdido o quemado un gran número de ellas.

Respecto al contenido concreto de los problemas geométricos, en la mayoría de ellos, intervienen circunferencias tangentes entre ellas o a rectas. Los cálculos para su resolución necesitan ecuaciones lineales o de segundo grado, muchas de ellas obtenidas a partir del teorema de Pitágoras, en el que los valores de los catetos e hipotenusa se calculan a partir de propiedades de la tangencia entre circunferencias y rectas.

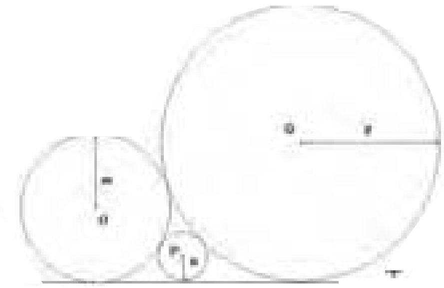
Como en este artículo me interesa centrarme en los problemas, y no tanto en la historia del *Sangaku*, dejo aquí esta breve introducción. Para aquellos lectores interesados en conocer más este tema, les remito a la revista *Investigación y Ciencia*, número de julio de 1998, en el que se publica un artículo de Tony Rothsman. En este artículo se desarrolla de una forma amplia, documentada e interesante la historia de la matemática japonesa (*wasan*) de todas las épocas y, en especial, se incluye todo el *Sangaku*.

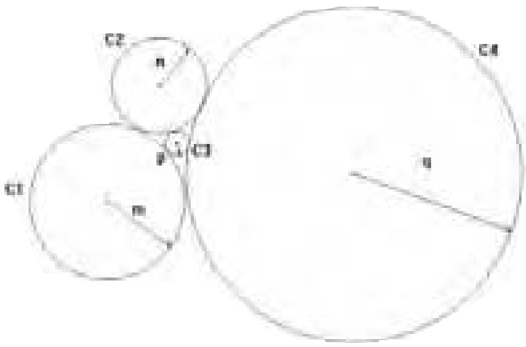
A continuación vamos a ver una colección de enunciados de problemas Sangaku, dejando su resolución para el final del artículo.

Problema nº 1

Este problema está datado en 1824 en la prefectura de Gunma y dice: *Las tres circunferencias de la figura son tangentes entre sí y a la recta horizontal “t”. Y pide establecer la relación entre sus radios.* En Japón se le conoce por *Tercer Teorema de Mikami y Kobayashi.*

Este problema es un caso particular del problema de las circunferencias tangentes de Descartes. Se trata del problema de calcular la relación de los radios de cuatro circunferencias cada una tangente a las otras tres. En él Descartes plantea la solución en términos no del valor de los radios de las circunferencias sino de su curvatura (recíproco de su radio). Se trata de sustituir la recta "t" por una cuarta circunferencia como se muestra en la figura:





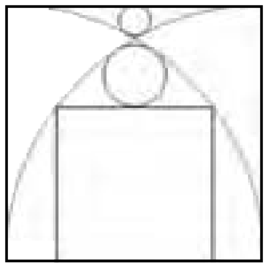
Si los radios de las circunferencias son los señalados en la figura se puede demostrar que su relación es:

$$\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^2$$

Aunque en la formulación de Descartes cada una de esas fracciones es sustituida por su inversa, es decir, por la curvatura de cada circunferencia. Sustituyendo q = ∞, tenemos el problema nº 1 arriba propuesto.

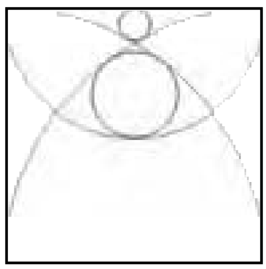
Problema nº 2

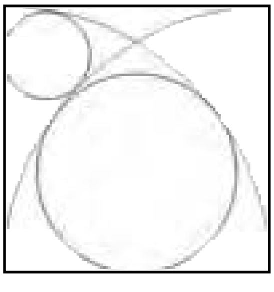
Calcular el lado del cuadrado inscrito así como los radios de las circunferencias inscritas en función del lado del cuadrado exterior.



Problema nº3

Calcular los radios de las circunferencias inscritas en función del lado del cuadrado.



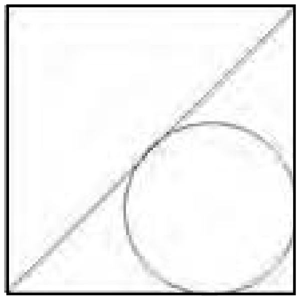


Problema nº4

Calcular los radios de las circunferencias inscritas en función del lado del cuadrado.

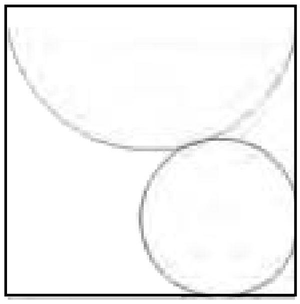
Problema nº 5

Calcular el radio de la circunferencia inscrita en función del lado del cuadrado.



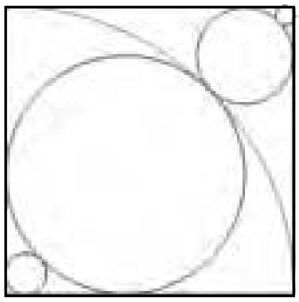
Problema nº 6

Calcular el radio de la circunferencia interna en función del lado del cuadrado.



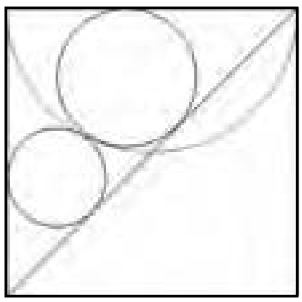
Problema nº 7

Calcular los radios de las circunferencias inscritas y la relación entre ellos.



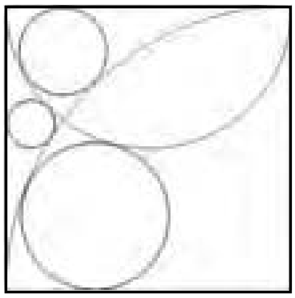
Problema nº 8

Calcular los radios de las circunferencias inscritas en términos del lado del cuadrado.



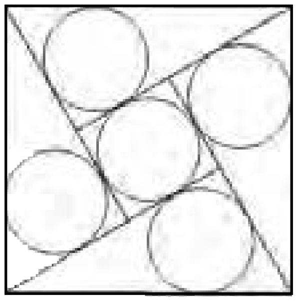
Problema nº 9

Calcular los radios de las circunferencias inscritas en función del lado del cuadrado.



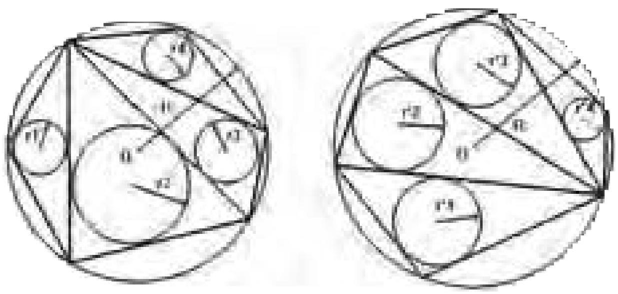
Problema nº 10

Calcular el radio de cualquier circunferencia inscrita (todas son iguales)



Problema nº 11

Este problema se conoce con el nombre de "Primer Teorema Japonés" o "Primer Teorema de Mikami y Kobayashi". El teorema establece que "si en una circunferencia de radio R, inscribimos un polígono convexo de n-lados y desde un vértice cualquiera trazamos todas las diagonales que parten de ese punto, la suma de los radios de todas las circunferencias inscritas en los triángulos formados, es independiente de la triangulación elegida, es decir, del vértice que elijamos para realizar la triangulación".



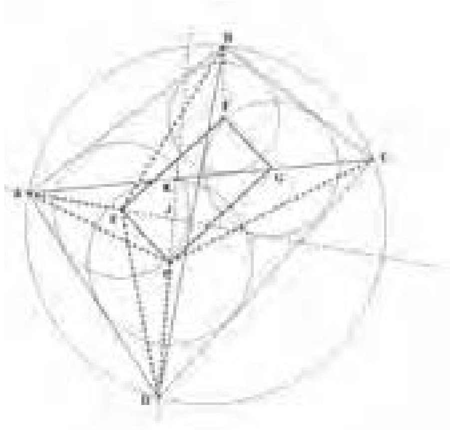
Para el caso del polígono de la figura con sus triangulaciones distintas el teorema expresaría la siguiente igualdad:

$$r1 + r2 + r3 + r4 = r'1 + r'2 + r'3 + r'4.$$

IDEA: Para su realización es interesante estudiar previamente el “Teorema de Carnot”, que liga los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita a un triángulo, con la suma de las longitudes de los segmentos perpendiculares a cada lado del triángulo desde el circuncentro. Como se observa en la figura del problema propuesto, todos los triángulos tienen la misma circunferencia circunscrita.

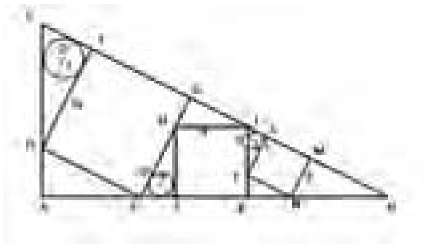
Problema nº 12

Este problema es el llamado “Segundo Teorema Japonés”, o “Segundo Teorema de Mikami y Kobayashi”. El teorema establece que “si en un cuadrilátero cualquiera inscrito en una circunferencia trazamos primero las dos diagonales y luego las cuatro circunferencias inscritas en los cuatro triángulos formados por una diagonal y dos lados del cuadrilátero, el cuadrilátero que une los incentros de esas cuatro circunferencias es un rectángulo”.



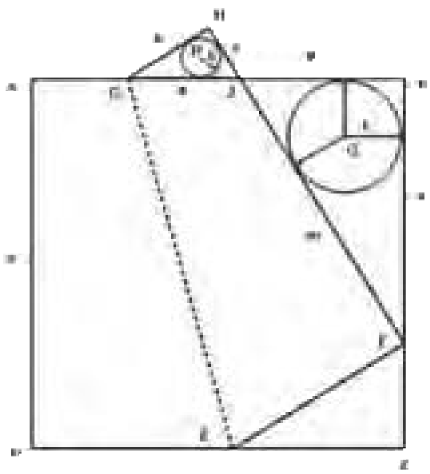
Problema nº 13.

Demostrar que el radio de la circunferencia de tamaño intermedio, en la figura que se muestra, es media geométrica de los dos radios de las otras dos circunferencias.



SOLUCIONES.

Solución al problema planteado en la introducción y referido al plegamiento de un cuadrado de papel.



Como se ve en la figura los dos triángulos GHJ y JBF son semejantes, ya que son rectángulos y tienen un ángulo opuesto por el vértice. Además la razón de proporcionalidad entre sus lados será la misma que entre los respectivos radios de las circunferencias inscritas. De esta manera:

$$\frac{m}{a} = \frac{r}{s} = \frac{p}{c}$$

de donde deducimos las igualdades:

$$\begin{cases} r\,a = m\,s = s\,(x - c) \\ r\,c = p\,s = s\,(x - a - b) \end{cases}$$ al restar una de otra se obtiene que:

$$r(a-c) = s(a+b-c) \qquad [1]$$

Como en un triángulo rectángulo el diámetro de la circunferencia inscrita es la suma de los catetos menos la hipotenusa, tendremos para el triángulo GHJ lo siguiente:

$2s = b + c - a$ por lo que sustituyendo [1] tendremos:

(NOTA: *Si este resultado no se conoce basta observar el triángulo rectángulo JBF de la figura. Como vemos en la figura el centro pertenece a las tres bisetrices y los radios son perpendiculares a los lados por tanto tenemos:*

$p - r + n - r = m$ *de donde* $p + n - m = 2r$)

$$r(a-c) = \tfrac{1}{2}(b+c-a)(a+b-c)$$

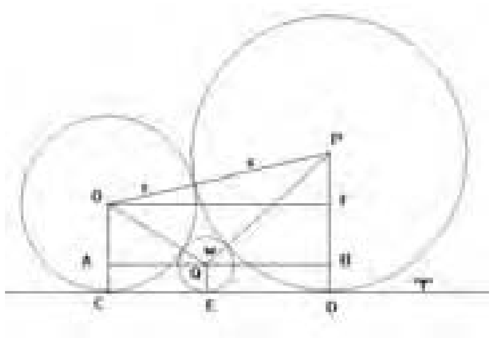
después de operar y teniendo en cuenta la relación pitagórica que liga a "a, b y c" obtenemos que:

$$r(a-c) = c(a-c)$$

Por tanto $r = c$ que era lo que se quería demostrar

El problema admite más soluciones que la de aquí propuesta

Problema nº 1



Trazamos los segmentos perpendiculares a la recta desde el centro de cada circunferencia y los segmentos paralelos a esa recta por el centro de la circunferencia pequeña y la mediana, como se muestra en la figura:

En el triángulo rectángulo PFO tenemos que:

$$CD = OF = \sqrt{(r+s)^2 - (s-r)^2} = 2\sqrt{rs}$$

Del mismo modo obtendríamos que:

$CE = 2\sqrt{rw}$ y que $ED = 2\sqrt{sw}$ Como la suma de estos dos últimos es el segmento anterior tendremos que:

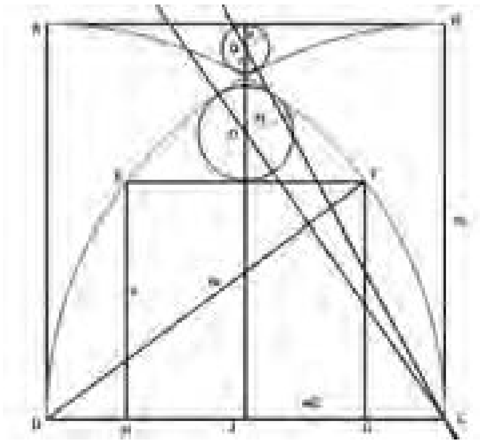
$$2\sqrt{rs} = 2\sqrt{rw} + 2\sqrt{sw}$$

Bastaría dividir por dos veces la raíz del producto de los tres radios($2\sqrt{rsw}$)) (para obtener la relación buscada:

$$\frac{1}{\sqrt{w}} = \frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{\sqrt{r}}$$

Si en el teorema de Descartes hacemos infinito el cuarto radio y operamos llegaríamos al mismo resultado que acabamos de obtener.

Problema nº 2



En primer lugar vamos a hacer el cálculo de la proporción entre lados de los dos cuadrados. Nos fijamos en el triángulo rectángulo DGF, de hipotenusa "m" y catetos "n" y "(m+n)/2":

$$m^2 = n^2 + \left(\frac{m+n}{2}\right)^2$$

Donde operando y reduciendo términos obtenemos:

$$5n^2 + 2mn - 3m^2 = 0$$

Resolviendo obtenemos como respuesta que:

n = 3/5 m

Para calcular "R" nos fijamos en el triángulo rectángulo CJO:

$$(m-n)^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(R + \frac{3m}{5}\right)^2$$

Operando y reduciendo términos llegamos a la expresión:

$$\frac{39m^2}{100} = \frac{16mR}{5}$$

de donde se obtiene el siguiente valor de "R":

$$R = \frac{39m}{320}$$

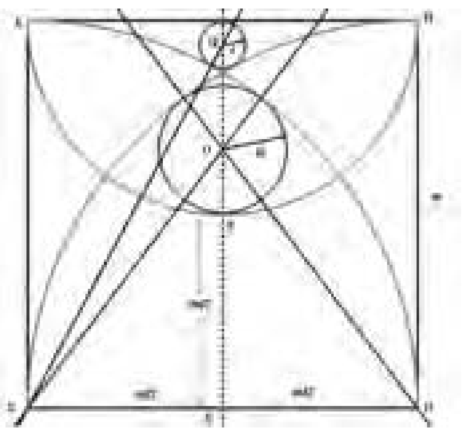
Para obtener el valor "r", nos fijamos en el triángulo rectángulo CJQ, de hipotenusa "m+r" y catetos, "m-r" y "m/2". La ecuación a resolver es:

$$(m+r)^2 = (m-r)^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

Cuya solución es:

r = m/16

Problema nº 3



Para el primer cálculo de "R" nos fijamos en el triángulo rectángulo CFO, donde los valores de la hipotenusa y de los catetos son, respectivamente, "m-R", "m/2" y "R+m/2". Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$(m-2)^2 = (m/2+R)^2 + (m/2)^2$$

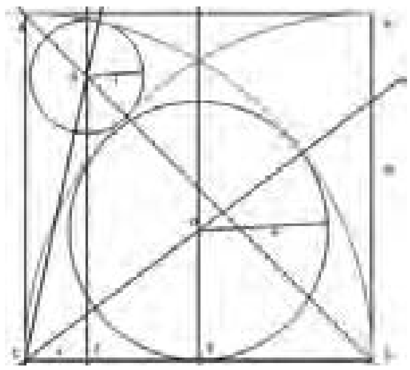
Resolviendo la ecuación obtenemos que **R = m/6**

El cálculo de "r" no es necesario hacerlo pues es, exactamente, el caso del problema anterior, es decir, su valor es: **r = m/16**

NOTA:

Realizados ya dos problemas es fácil ver que la estrategia de resolución de este tipo de problemas consiste en encontrar el triángulo rectángulo adecuado que, en general, es el que tiene su hipotenusa sobre la recta que une los centros de las circunferencias que son tangentes y que pasa el punto de tangencia. Es decir, utilizamos la propiedad geométrica de las circunferencias tangentes, que establece que los centros y el punto de tangencia son colineales.

Problema nº 4



Para el cálculo de "R" nis fijamos en el triángulo rectángulo CEO, cuya hipotenusa es "m-R" y los catetos son "R" y "m/2".

$$(m-R)^2 = R^2 + (m/2)^2$$

De cuya resolución obtenemos:

R = 3m/8

Para calcular "r", tenemos que recurrir a dos triángulos rectángulos, por una lado, CFQ y, por otro lado, DFQ. Se debe a que tenemos que introducir el segmento FQ que es desconocido, por lo que debemos establecer una ecuación adicional. Utilizando una vez cada triángulo señalado tenemos:

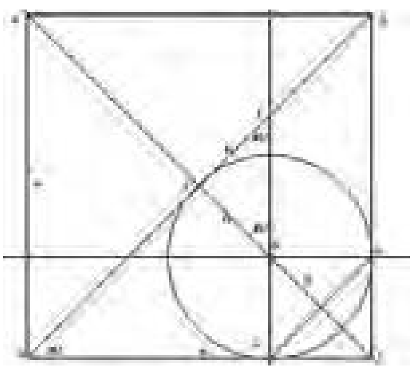
$$(m-r)^2 = r^2 + FQ^2 \qquad FQ^2 = (r+m)^2 - (m-r)^2$$

Sustituyendo y operando obtenemos:

$$(m-r)^2 = r^2 + 4mr$$

De donde se obtiene que: **r = m/6**

Problema nº 5



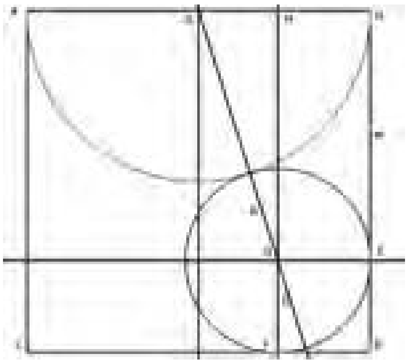
El segmento DE es el valor de media diagonal más el radio "R" pero, por otro lado, como DHE es un triángulo rectángulo isósceles de catetos "m-R", la hipotenusa (DE) valdrá ese valor por la raíz cuadrada de 2. Por tanto:

$$\left(m\sqrt{2}/2\right) + R = (m-R)\sqrt{2}$$

Resolviendo obtenemos:

$$R = \frac{m}{2+\sqrt{2}}$$

Problema nº 6



En el triángulo rectángulo GHO tenemos la relación necesaria para la resolución del problema. En efecto, se cumple la relación siguiente:

$$GO^2 = GH^2 + HO^2$$

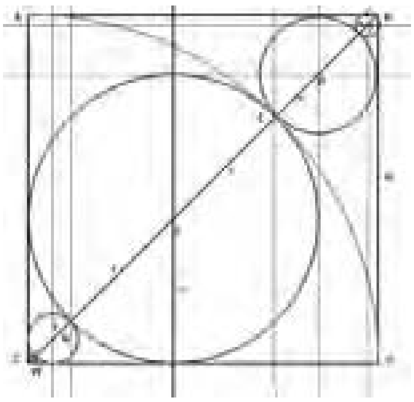
Sustituyendo los valores correspondientes obtenemos:

$$(m/2+R)^2 = (m-R)^2 + (m/2-R)^2$$

Resolviendo la ecuación se obtiene el valor siguiente de "R":

$$R = m(2-\sqrt{3})$$

Problema nº 7



7-1º.- Cálculo del primer radio "r". Para resolverlo nos fijamos en que el segmento CE, es suma de CO + OE, por tanto:

$$r\sqrt{2} + r = m$$

De donde:

$$r = \frac{m}{1+\sqrt{2}}$$

7-2º.- Cálculo del radio de la circunferencia de centro "Q":

Sumamos los segmentos CQ + QO +OE = m, por tanto, teniendo además en cuenta la relación del apartado anterior:

$$m = r(1+\sqrt{2}) \qquad t\sqrt{2} + t + 2r = m$$

De donde obtenemos:

$$t = \frac{m}{7+5\sqrt{2}}$$

7-3º.- Calculamos el radio de la circunferencia de centro "P". Para ello nos fijamos en el segmento EB, que es suma de EP + PB. De esta forma tenemos:

$$s + s\sqrt{2} = m\sqrt{2} - m$$

Resolviendo se obtiene:

$$s = \frac{m}{3 + 2\sqrt{2}}$$

7-4º.- Para la circunferencia de centro "Z" y radio "u":

$$s\sqrt{2} = s + u + u\sqrt{2}$$

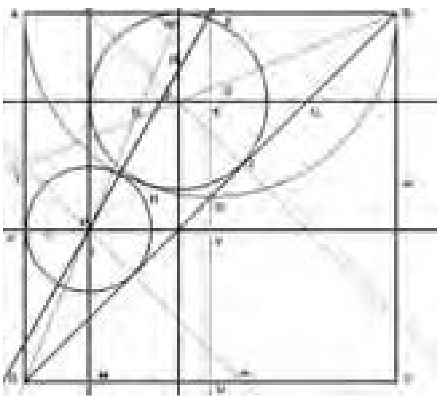
O lo que es lo mismo:

$$s(\sqrt{2} - 1) = u(1 + \sqrt{2})$$

Si ahora sustituimos el valor de "s" por el antes calculado tenemos:

$$u = \frac{m}{17 + 12\sqrt{2}}$$

Problema nº 8



Es fácil comprobar que los ángulos WBO y XDP valen cada uno de ellos la cuarta parte de un recto, pues son la mitad del ángulo de la diagonal del cuadrado que es la mitad de un recto. Al ser conocido el valor del ángulo también lo serán las relaciones trigonométricas de él. En concreto nos será útil el valor de su tangente a la que daremos el valor de "t", es decir, a partir de ahora damos por conocido que:

tg p/8 = t

En particular para el triángulo rectángulo OWB, tendremos que:

WB = R / t

Calculamos primero el valor del radio grande "R":

$$OE^2 = OK^2 + KE^2$$

Sustituyendo sus valores:

$$\left(\frac{m}{2} - R\right)^2 = \left(\frac{R}{t} - \frac{m}{2}\right)^2 + R^2$$

Donde ya está sustituido WB = R / t. Resolviendo la ecuación se obtiene que:

R = m t (1 – t)

Para el cálculo del radio de la circunferencia pequeña nos fijamos en el triángulo PYE, de donde obtenemos que si:

$$PE^2 = PY^2 + EY^2$$

al sustituir en términos de "r", "m" y "t", tendremos:

$$\left(\frac{m}{2}+r\right)^2 = \left(\frac{m}{2}-r\right)^2 + (m-DX)^2$$

Como r = DX t , sustituyendo se obtiene que

$$\left(\frac{m}{2}+r\right)^2 = \left(\frac{m}{2}-r\right)^2 + \left(m-\frac{r}{t}\right)^2$$

Operando obtenemos: $2mr = \left(m-\frac{r}{t}\right)^2$

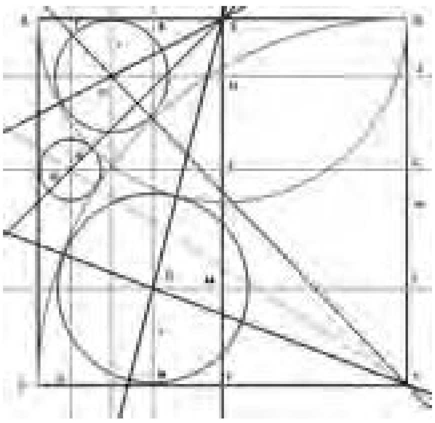
Si reducimos términos y nos fijamos que $1 + t = \sqrt{2}$ (es importante este cambio pues, de lo contrario, se complica la resolución) obtenemos la ecuación de segundo grado siguiente:

$$r^2 - 2\sqrt{2}mtr + m^2t^2 = 0$$

Cuya resolución nos lleva al valor siguiente para "r":

$$r = mt(\sqrt{2}-1) = mt^2$$

Problema nº9



Empezamos calculando el radio más pequeño. Nos fijamos en los triángulos rectángulos QSC y QEF y, por comodidad, escribimos BG = a = EF. Podemos expresar las siguientes dos ecuaciones:

$$(m+u)^2 = (m-u)^2 + (m-a)^2 \qquad \left(\frac{m}{2}+u\right)^2 = \left(\frac{m}{2}-u\right)^2 + a^2$$

De donde se obtienen las dos ecuaciones siguientes:

$$a^2 = 2mu \qquad (m-a)^2 = 4mu$$

O lo que es lo mismo: $2a^2 = (m-a)^2$ De donde se obtiene que:

$a = \frac{m}{1+\sqrt{2}}$ o bien que $a = m(\sqrt{2}-1) = mt$, utilizando el valor de la tangente de "π/8" usado en el problema anterior. Por tanto el valor del radio será:

$$u = \frac{a^2}{2m} = \frac{(mt)^2}{2m} = \frac{mt^2}{2}$$

Calculamos ahora el radio de la circunferencia intermedia. En la figura al segmento PJ le llamamos "p". En los triángulos rectángulos PHE y PJC, podemos plantear las siguientes ecuaciones:

$$(m+s)^2 = p^2 + (m-s)^2 \qquad \left(p-\frac{m}{2}\right)^2 + s^2 = \left(\frac{m}{2}-s\right)^2$$

De estas ecuaciones se obtiene que: p = 5s y que el radio buscado es:

$$s = \frac{4}{25} m$$

Por último calculamos el radio de la circunferencia mayor. Para ello nos fijamos en los triángulos rectángulos ONC y OME y, a su vez, hacemos que NC = b.

$$(m-r)^2 = r^2 + b^2 \qquad \left(\frac{m}{2}+r\right)^2 = (m-r)^2 + \left(b-\frac{m}{2}\right)^2$$

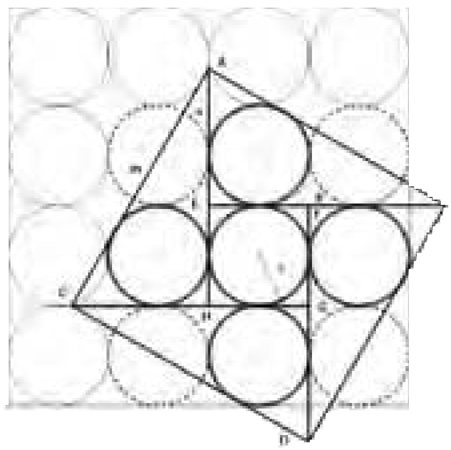
Resolviendo este sistema se llega a la ecuación siguiente: b = 2 m – 5 r, que, después de sustituir nos permite obtener el valor siguiente para "r":

$$r = \frac{(9-\sqrt{6})m}{25}$$

Problema nº 10

Como se observa en la figura los dos catetos están relacionados a través del diámetro. Entre este resultado y el que hemos utilizado en el problema de introducción tendremos:

$$2r + n = p$$



$$2r = n + p - m$$

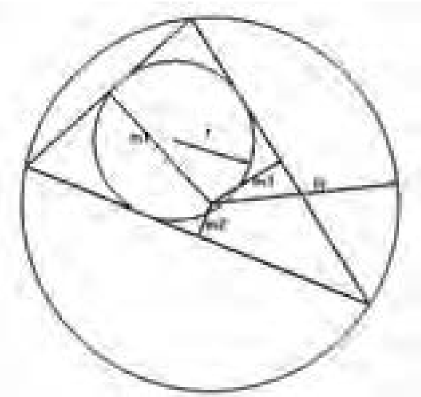
Combinando ambas ecuaciones obtenemos que:

m = 2n Resultado que nos dice que cada triángulo rectángulo es la mitad de un triángulo equilátero, por tanto, los ángulos de ese triángulo serán 30º y 60º. Es decir tenemos que:

$2r = p - n$; $n = m/2$ y $p = \dfrac{m\sqrt{3}}{2}$ Sustituyendo nos queda el resultado:

$$r = \frac{m(\sqrt{3}-1)}{2}$$

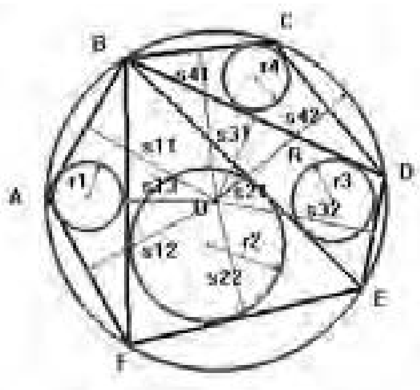
PROBLEMA Nº 11



Para su resolución hay que aplicar el teorema de Carnot que establece que "en un triángulo cualquiera la suma de las longitudes de los tres segmentos perpendiculares desde el circuncentro a los tres lados, es igual a la suma de los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita". En nuestro caso:

$$m1 + m2 + m3 = r + R$$

Donde, y esto es muy importante señalarlo, las distancias m1, m2 y m3 alguna de ellas puede ser positiva o negativa. Son siempre positivas salvo que la perpendicular sea "toda ella" exterior al triángulo. Se comprende fácilmente que, solamente, una de ellas podrá ser negativa pues es imposible trazar dos perpendiculares desde el circuncentro que sean totalmente externas. Su demostración es sencilla y se encuentra en muchos libros y páginas de Internet, por lo que la damos por válida sin demostrarla.



En nuestro problema todos los triángulos están circunscritos a la misma circunferencia, por tanto tienen todos el mismo circuncentro. Es claro, entonces, que lo que tendremos que hacer es aplicar el teorema de Carnot a cada uno de los triángulos en los que hemos dividido el polígono. De esta forma, desde el circuncentro común trazamos todas las perpendiculares a cada uno de los lados de todos los triángulos en los que hemos dividido al polígono. Se observa que, como los triángulos contiguos tienen un lado común, una de esas perpendiculares será la misma a ambos y, además si es externa a uno de ellos será interna al contiguo. Esto tiene importancia porque, como ya hemos citado anteriormente, en el T.de Carnot estas perpendiculares tienen signo "+ ó – " según sean internas o externas al triángulo. Aplicando el teorema de Carnot consecutivamente a los cuatro triángulos tenemos:

$$s11 + s12 - s13 = R + r1$$
$$s21 + s22 + s13 = R + r2$$
$$s31 + s32 - s21 = R + r3$$
$$s41 + s42 - s31 = R + r4$$

Si sumamos todas obtenemos que:

$$s11 + s12 + s22 + s32 + s41 + s42 = 4R + r1 + r2 + r3 + r4$$

Es decir que sólo nos queda la suma de las perpendiculares a los lados, desapareciendo las perpendiculares a las diagonales, por tanto si ahora sobre el mismo polígono elegimos otra triangulación, obtendremos el mismo resultado con los nuevos radios pues el circuncentro y los lados de los triángulos, que son lados del polígono inscrito, no varían. Es decir tendremos que:

$$s11 + s12 + s22 + s32 + s41 + s42 = 4R + r'1 + r'2 + r'3 + r'4$$

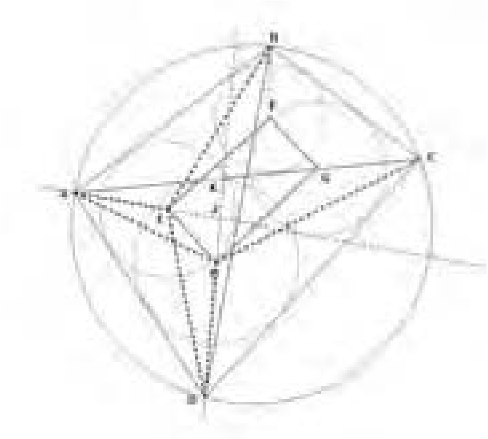
De donde se deduce que:

$$r1 + r2 + r3 + r4 = r'1 + r'2 + r'3 + r'4$$

Eligiendo otra nueva triangulación obtendríamos que:

$$r1 + r2 + r3 + r4 = r'1 + r'2 + r'3 + r'4 = r''1 + r''2 + r''3 + r''4$$

Es decir la suma de los radios es independiente de la triangulación elegida.



Problema nº 12.

La demostración es bastante compleja, siendo los pasos los siguientes:

1º.- Se demuestra que los ángulos <AED y <AHD son iguales. Esto se hace viendo que:

< AED + <D/2 + <A/2= 180 = <A + <B + <D donde con a <A, <B, <C y <D nos referimos a los ángulos sólo del los triángulos. Por tanto:

$$<AED = 90º + <B/2$$

De igual forma obtendríamos que:

<AHD = 90º + <C/2 Pero al abarcar ambos ángulos el mismo arco sobre la misma circunferencia serán iguales, es decir, obtenemos que:

$$<AED = <AHD$$

2º.- Como consecuencia de este resultado el cuadrilátero AEHD se puede inscribir en una circunferencia y se demuestra que:

<EHJ = <EAD. En efecto:

<EHD + <EHJ = 180º y por otro lado <EAD = (360º -2 <EHD) / 2 . Combinando las dos obtenemos:

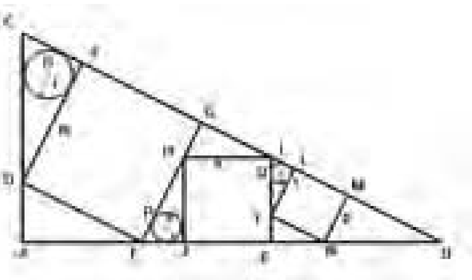
$$<EHJ = <EAD = 180º - <EHD$$

3º.- De forma análoga se obtiene que:

<JHG = <DCG Por tanto:
<EHG = <EHJ + <JHG = <EAD + <DCG = 180º /2 = 90º

Es decir, para el primer ángulo hemos demostrado que es recto. Haciendo lo mismo con los demás se comprueba que los demás ángulos también son rectos por lo cual el cuadrilátero es rectángulo.

Problema nº 13.



Para encontrar la respuesta nos fijamos en que todos los triángulos rectángulos son semejantes. Vamos a llamar "α" al ángulo más pequeño, es decir, CDF ó AED ó ABC... etc, ya que todos son iguales.

En el triángulo rectángulo DFC aplicamos ya relación ya usada en el problema de introducción (relación del radio de la circunferencia inscrita con los catetos y la hipotenusa). De esta manera para cada circunferencia tendremos

$$2r = m + m \tan\alpha - m / \cos\alpha = m(1 + \tan\alpha - 1/\cos\alpha) = m\,u$$
$$2s = n + n \tan\alpha - n / \cos\alpha = n(1 + \tan\alpha - 1/\cos\alpha) = n\,u$$
$$2t = p + p \tan\alpha - p / \cos\alpha = p(1 + \tan\alpha - 1/\cos\alpha) = p\,u$$

Por otro lado, podemos relacionar el lado de cada cuadrado con el anterior, de esta manera:

$$n = p / \cos\alpha + p \operatorname{sen}\alpha = p(1/\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) = p\,v$$
$$m = n / \cos\alpha + n \operatorname{sen}\alpha = n(1/\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) = n\,v = p\,v\,v.$$

Por tanto:

$$2r = p\,v\,v\,u$$
$$2s = p\,u\,v$$
$$2t = p\,u$$

Dividiendo las dos primeras entre sí y, luego, las dos segundas tenemos:

$$r/s = v$$
$$s/t = v$$

Lo que nos lleva al resultado que:

$$s\ s = r\ t \quad \text{o lo que es lo mismo} \quad s = \sqrt{rt}$$

Es decir el radio intermedio es media geométrica de los otros dos. Es claro que si seguimos dibujando, según el esquema de estos tres cuadrados inscritos, en el triángulo rectángulo más pequeño, se seguirá cumpliendo la misma relación entre tres circunferencias consecutivas.

Nota: Todas las figuras están hechas con el programa CABRI

BIBLIOGRAFÍA:

Rothman, Tony, "Geometría en los templos del Japón". Revista *Investigación y Ciencia*. Julio de 1998.

Honsberger, Ross, "More Mathematical Morsels". *Mathematical Association Of America*. 1991

Páginas web consultadas:

www.arrakis.es/~mcj/sangaku02.htm

www.tem.nhl.nl/~bloemh/download/sangakuoplossingen.pdf

www2.gol.com/users/coynerhm/0598rothman_ans1.html

www.mfdabbs.pwp.blueyonder.co.uk/Maths_Pag.../Japanese_Temple_Geometry.htm

godel.ph.utexas.edu/~tonyr/sangaku.html

www.wasan.jp/english/

www.inf.u-szeged.hu/~pszabo/Sangaku.html

www.paginar.net/matias/articles/sangaku/sangaku.html

MI NIETO Y YO MIRAMOS LAS ESTRELLAS

Mi nieto y yo
miramos las estrellas juntos.

Mi nieto tiene seis meses.
Yo tengo sesenta años.

Mi nieto ve más estrellas que yo.
Yo sueño más estrellas que mi nieto.

Vemos lo mismo.
Nos igualamos.

Fede Bilbao (Algorta. Bizkaia)